

Durch gekrümmte Flächen modifizierte Schallfelder

Martijn Vercammen

Peutz bv, Lindenlaan 41, 6585 ZH Mook, Niederlande, m.vercammen@mook.peutz.nl
und Peutz GmbH, Kolbergerstrasse 19, 40599 Düsseldorf, mv@peutz.de

Einleitung

Viele Räume weisen gekrümmte Geometrien bei Wänden oder Decken auf. Durch Modeerscheinungen in der Architektur („Blobs“) und mit fortschreitender Bautechnologie entstehen somit aus der Verwendung konkaver Geometrien mehr und mehr akustische Probleme. Wenn Schall an konkav gekrümmten Flächen reflektiert wird, wird die Schallenergie durch diese Geometrie in bestimmten Raumbereichen konzentriert.

In der Raumakustik wird das Schallfeld in solchen Fällen üblicherweise angenähert, indem die reflektierte Energie über Simulationsprogramme mit Raytracing- oder Spiegelquellen-Algorithmen berechnet wird, wobei die gekrümmten Flächen polygonal segmentiert modelliert werden. Eine alternative Berechnungsmethode ist ein geometrisches Verfahren. Die Resultate beider Methoden stimmen jedoch nicht mit der Wirklichkeit überein. Die einzige Methode, welche korrekte Ergebnisse liefert, ist die Bestimmung der lokalen Schallpegel aus einer Extrapolation des Schallfeldes. Für bestimmte Fälle werden analytische Lösungen des Kirchhoffintegrals präsentiert.

Der Kirchhoffintegral

Nach dem Prinzip von Huygens kann jeder Punkt auf einer Wellenfront als neue Elementarquelle angesehen werden. Die davon ausgehenden Wellen überlagern sich konstruktiv zu einer neuen Wellenfront in Fortpflanzungsrichtung

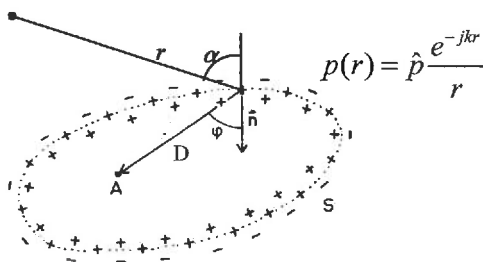


Abbildung 1: Die Quelle erzeugt auf jedem Punkt (mit Abstand r) auf der Oberfläche S einen Druck und eine Schnelle in Richtung der Normalen. Diese Punkte werden neue Monopol- und Dipolquellen, woraus der Druck in A berechnet wird.

Aus Green's Theorem hat Kirchhoff sein Integral abgeleitet:

$$p_A = \frac{\hat{p}}{4\pi} \int_S \left(\frac{1+jkD}{D} \cos\varphi + \frac{1+jkr}{r} \cos\alpha \right) \frac{e^{-jk(D+r)}}{Dr} dS \quad (1)$$

Für $r \gg \lambda$ and $d \gg \lambda$ kann diese Formel vereinfacht werden (die Fresnel-Kirchhoff'sche diffraction-Formel):

$$p_A = -\frac{j\hat{p}}{\lambda} \int_S \left(\frac{\cos\alpha + \cos\varphi}{2} \right) \frac{e^{-jk(D+r)}}{Dr} dS \quad (2)$$

Reflexionen von einer Kuppel

Man kann eine Kugel beschreiben mit einem Radius R , den Raumkoordinaten (r, ϕ, θ) und Oberflächenelementen $dS = R^2 \cdot \sin\phi \cdot d\phi \cdot d\theta$.

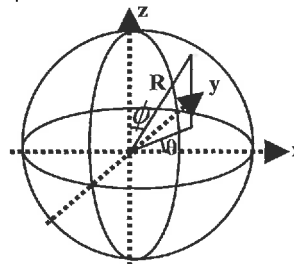


Abbildung 2: Kugelkoordinaten für die Reflexionen an einer Kuppel

Damit kann (1) geschrieben werden als:

$$p_A = \frac{\hat{p}R^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+jkr}{r} \cos\alpha + \frac{1+jkD}{D} \cos\varphi \right) \frac{e^{-jk(D+r)}}{Dr} \sin\phi \cdot d\phi d\theta \quad (3)$$

Für eine bestimmte Situation, nämlich mit der Kugel und $R \gg \lambda$ ist es möglich, (3) zu vereinfachen und zu lösen:

$$p_A = -\frac{j\hat{p}R}{\lambda} \cdot e^{-jkR} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\phi \cdot \frac{e^{-jkr}}{R} \cdot d\phi d\theta = -j2\hat{p}k \cdot e^{-j2kR} \quad (4)$$

Für eine Kuppel (Halbkugel) ergibt sich für die Amplitude des Drucks:

$$|p_A| = k\hat{p} = \frac{2\pi\hat{p}}{\lambda} \quad (5)$$

Diesen Schallpegel kann man auch mit einem geometrischen Verfahren abschätzen, wobei man die Oberfläche, über welche die Energie sich verteilt, durch einen Kreis mit dem Radius $\frac{1}{4}\lambda$ annähert.

Wenn man keine Halbkugel, sondern ein Kuppelsegment hat, kann der Schalldruck im Brennpunkt berechnet werden mit:

$$|p_A| = k\hat{p}(1 - \cos\phi_m) = \frac{2\pi\hat{p}(1 - \cos\phi_m)}{\lambda} \quad (6)$$

Reflexionen in einem Zylinder

Wir können einen Zylinder beschreiben mit Radius R , Zylinderkoordinaten (r, θ, z) und Oberflächenelementen

$$dS = R d\theta dz \text{ und } r_s = \sqrt{R^2 + z^2} \text{ (siehe Abb 3).}$$

Für $A=(0,0,0)$ kann des Kirchhoff-Integral vereinfacht werden ($D = r_s$ und $\cos\alpha = \cos\varphi = \frac{R}{D}$):

$$p_A = -j\hat{p}kR^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jkzD}}{D^3} dz = -j\hat{p}kR^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2jk\sqrt{R^2+z^2}}}{(R^2+z^2)^{3/2}} dz \quad (7)$$

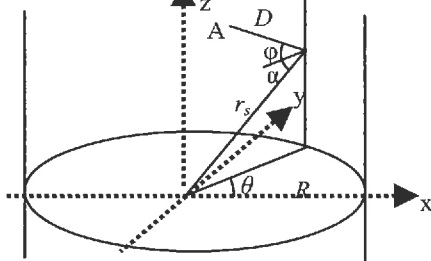


Abbildung 3: Zylinderkoordinaten für die Reflexionen in einem Zylinders

Dieses Integral kann mit [2] (für $A=(0,0,0)$, $R > \lambda$) gelöst werden:

$$p_A = \hat{p}(1+i)\sqrt{\frac{\pi k}{2R}} e^{-2jkr} \quad (8)$$

Im Gegensatz zum Schalldruck im Brennpunkt einer Kuppel/eines Kuppelsegments, ist bei einem Zylinder der Druck abhängig vom Radius. Durch Maßnahmen mit Diffusoren kann der Schalldruck im Brennpunkt reduziert werden. Bei Zylindern kann das ausreichend sein, bei Kuppelechos ist es kaum möglich, den Schalldruck der Echos unter den Schalldruck des direkten Schalls zu reduzieren [1].

Reflexionen gekrümmter Flächen

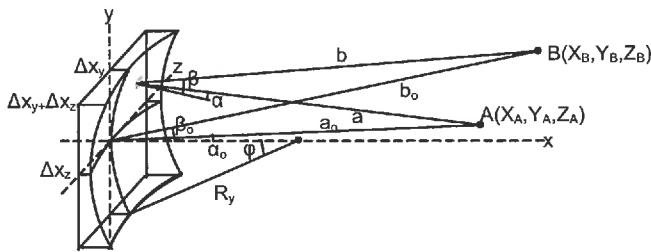


Abbildung 4: Koordinaten und Symbole für die Reflexionen gekrümmter Flächen

Nun betrachten wir eine in zwei Richtungen gekrümmte rechteckige Fläche (Krümmung definiert mit R_y und R_z).

Wenn die Quelle in A und der Empfangspunkt B genügend weit entfernt sind ($a_0, b_0 > 2S/\lambda$), können für die Amplitudenfunktion einige Abstände unabhängig von dS angenommen werden:

$$a \approx a_0, \cos \alpha \approx \cos \alpha_0, b \approx b_0, \cos \beta \approx \cos \beta_0$$

Das Kirchhoff-Integral kann dann geschrieben werden als:

$$p_B = \frac{\hat{p}}{4\pi \cdot a_0 b_0} \left(\frac{1+jka_0}{a_0} \cos \alpha_0 + \frac{1+jkb_0}{b_0} \cos \beta_0 \right) \iint e^{-jk(a+b)} dy dz \quad (9)$$

Für die Phasenfunktion ist eine genauere Beschreibung notwendig. Aus der Taylorreihe kann die Krümmung Δx angenähert werden: $\Delta x \approx R - R \cos \frac{y}{R} \approx R - R \left(1 - \frac{y^2}{2R^2} \right) = \frac{y^2}{2R}$.

Damit ist: $a^2 = \left(X_A - \left(\frac{y^2}{2R_y} + \frac{z^2}{2R_z} \right) \right)^2 + (Y_A - y)^2 + (Z_A - z)^2$

Wenn wir die quadratischen Terme von y und z

vernachlässigen, die Wurzel nach der Taylorreihe entwickeln und für a_0 verwenden: $a_0^2 = X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2$, dann kann a angenähert werden über:

$$a \approx a_0 - \frac{X_A}{a_0} \left(\frac{y^2}{2R_y} + \frac{z^2}{2R_z} \right) - \frac{Y_A}{a_0} y - \frac{Z_A}{a_0} z \quad (10)$$

Diese Lösungsmethodik ähnelt der Lösung der Fraunhofer - Diffraction [3]. Aus (10) erhält man die Phasenfunktion:

$$-jk(a+b) = -jk(a_0+b_0) + jC_1 y^2 + jC_2 y + jC_3 z^2 + jC_4 z$$

$$C_1 = k \left(\frac{X_A}{2a_0 R_y} + \frac{X_B}{2b_0 R_y} \right) \quad C_2 = k \left(\frac{Y_A}{a_0} + \frac{Y_B}{b_0} \right)$$

$$C_3 = k \left(\frac{X_A}{2a_0 R_z} + \frac{X_B}{2b_0 R_z} \right) \quad C_4 = k \left(\frac{Z_A}{a_0} + \frac{Z_B}{b_0} \right) \quad (11)$$

Diese Phasenfunktion kann in y- und z-Komponente aufgeteilt werden. Das Integral der resultierenden Funktion ist lösbar [4]:

$$p_B = \frac{\hat{p} \cdot e^{-jk(a_0+b_0)}}{4\pi \cdot a_0 b_0} \left(\frac{1+jka_0}{a_0} \cos \alpha_0 + \frac{1+jkb_0}{b_0} \cos \beta_0 \right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{8C_1}} (1+j) \cdot e^{-j\frac{C_2^2}{4C_1}} \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{(1+j)}{\sqrt{8C_1}} (2C_1 y_2 - C_2) \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{(1+j)}{\sqrt{8C_1}} (2C_1 y_1 - C_2) \right) \right] \cdot \sqrt{\frac{\pi}{8C_3}} (1+j) \cdot e^{-j\frac{C_4^2}{4C_3}} \cdot \left[\operatorname{erf} \left(\frac{(1+j)}{\sqrt{8C_3}} (2C_3 z_2 - C_4) \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{(1+j)}{\sqrt{8C_3}} (2C_3 z_1 - C_4) \right) \right] \quad (12)$$

Die Differenz zweier (verschobener) komplexer Fehlerfunktionen ist eine Funktion mit einer Hauptkeule und Nebenkeulen ähnlich wie bei Besselfunktionen. Abbildung 5 zeigt das Berechnungsergebnis dieser analytischen Lösung und eine numerische Lösung basierend auf (1).



Berechnung mit (12)

Numerische Lösung mit (1)

Abbildung 5: Reflexionsschallfeld einer gekrümmten Fläche 1m x 1m (an der Unterseite), Radius 10 m, Quelle im Mittelpunkt (an der Oberseite), $k = 9,2$ (500 Hz).

Mit dieser Formel können Schalldruck und Phase und somit das Schallfeld gekrümmter Flächen mit ausreichender Genauigkeit vorausberechnet werden.

Literatur

- [1] Vercammen, M.: Reflections of sound from concave surfaces, proceedings symposium on room acoustics, Seville, Sept. 2007
- [2] Kuttruff, H.: Some remarks on the simulation of sound reflection from curved walls. Acustica Vol. 77 (1993), p. 176.
- [3] Hecht, E., Zajac, A.: Optics, Addison-Wesley Pub. Co., 1974
- [4] Abramowitz, M., Stegun, I.: Handbook of Mathematical Functions, Dover Pub. 1970